Curso de Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 55

Autor del curso: Javier García

Documento escrito por: Roger Balsach

7 de marzo de 2021

En este documento vamos a demostrar, tal como Javier propuso en su video, la demostración de que $SO(3)$ y, en general, $SO(N)$ es un grupo de Lie.

Definimos el grupo $SO(N)$ como el siguiente subconjunto de matrices $N \times N$

$$\{R \in M_{N\times N} : R^T R = \mathbb{I} \ \wedge \ |R| = 1\}$$

junto con el producto ordinario de matrices. Vamos ahora a demostrar los cuatro postulados:

0. Postulado de clausura

Queremos demostrar que, para cualquier pareja $R_1, R_2 \in SO(N)$ el producto $R_1 \cdot R_2$ también pertenece a $SO(N)$. El hecho que $R_1, R_2 \in SO(N)$, nos permite afirmar que

$$R_1 \in M_{N\times N}, \quad R_1^T R_1 = 1, \quad |R_1| = 1, \quad R_2 \in M_{N\times N}, \quad R_2^T R_2 = 1, \quad |R_2| = 1$$

Y queremos demostrar que $R_1 R_2 \in SO(N)$, es decir que

$$R_1 R_2 \in M_{N\times N} \tag{1}$$

$$(R_1 R_2)^T (R_1 R_2) = 1 \tag{2}$$

$$|R_1 R_2| = 1 \tag{3}$$

Sabemos que el producto ordinario de matrices viene definido por

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

El producto de dos matrices solo tiene sentido, por lo tanto, si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda. Además, el número de filas de la matriz producto viene dado por el número de valores que puede tomar el índice i, es decir, que coincidirá con el número de filas de de A, de forma equivalente el número de columnas será igual al número de columnas de la matriz B.

En nuestro caso, dado que las dos matrices son $N \times N$, el producto está bien definido y el resultado es una matriz $N \times N$. Por lo que demostramos la ecuación (1).
Ahora, la matriz transpuesta se define como

$$(A^T)_{ij} \equiv A^T_{ij} = A_{ji}$$

Y, en general, la transpuesta del producto cumple la siguiente propiedad

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k B^T_{ik} A^T_{kj} = B^T A^T$$

Por lo que podemos reescribir la ecuación (2) como

$$(R_1 R_2)^T (R_1 R_2) = (R_2^T R_1^T)(R_1 R_2) = R_2^T (R_1^T R_1) R_2 = R_2^T R_2 = 1 \tag{4}$$

Donde hemos usado que el producto de matrices es asociativo.[1] Quedando así demostrada la ecuación (2).

Finalmente, sabiendo que el determinante de un producto es el producto de determinantes, i.e.

$$|AB| = |A||B|$$

La ecuación (3) se escribe como

$$|R_1R_2| = |R_1||R_2| = 1 \tag{5}$$

Quedando ahora demostrado el postulado de clausura.

1. Propiedad asociativa

La propiedad asociativa se hereda de la propiedad asociativa del producto de matrices ordinario, una demostración se encuentra en la solución del ejercicio del capítulo 54.

2. Elemento neutro

Es fácil ver que la matriz identidad $N \times N$ pertenece al grupo $SO(3)$, en efecto se comprueba inmediatamente que

$$\mathbb{I}^T\mathbb{I} = \mathbb{I}^2 = \mathbb{I}, \qquad |\mathbb{I}| = 1$$

Además de que, para toda matriz $N \times N$ se cumple

$$\mathbb{I}R = R\mathbb{I} = R$$

3. Elemento inverso

De la propia definición de $SO(3)$ podemos ver que R^T es la matriz inversa de R. Por las propiedades de los determinantes sabemos que

$$|R^T| = |R| = 1$$

También, por las propiedades de las matrices, podemos ver que

$$R^TR = 1 \Longrightarrow RR^T = 1 = (R^T)^TR^T$$

Por lo que R^T también es un elemento de $SO(N)$.

[1] Ver postulado 1.